ソボレフ空間上の広義積分としてのFeynman経路積分(偏微分方程式の解の構造の研究)

藤原, 大輔

数理解析研究所講究録
766巻 1991年 68-82

ソボレフ空間上の広義積分としての Feynman 経路積分.

東京工業大学理学部
藤原大輔
Daisuke FUJIWARA

§1 結果

$L(\dot{x},x)=\frac{1}{2}|\dot{x}|^2-V(x)$ をラグランジュ関数とする。$V(x)$はポテンシャルである。以下記述を単純にするため配位空間は1次元とするが、多次元でも本質は変らない。経路 $\gamma: [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, ただし $\gamma(0)=y$, $\gamma(T)=x$, $\dot{\gamma}\in L^2(0,T)$ の作用とは積分

$$S(\gamma)=\int_0^T L(\dot{\gamma}(s),\gamma(s))\,ds$$

である。

Feynman経路積分とは、経路の全体の空間Ω上の形式的積分

$$\int_\Omega e^{i\hbar^{-1}S(\gamma)}\mathcal{D}[\gamma]$$

である。$\hbar$はプランク定数.

これに厳密な数学的意味を付ける試みは，幾つか成されたがここでは，伊藤清の定式化 [1]，[7] を採用する。

伊藤の定式化は，次のとうりである。まず $\gamma_0(0)=y$，$\gamma_0(T)=x$ となる直　を γ_0 とする。すなわち，

$$\gamma_0(s)=\frac{s}{T}x+\frac{T-s}{T}y.$$

次に　ソボレフ空間 $H_0^1(0,T)=\{\gamma:\ \dot{\gamma}\in L^2(0,T),\ \gamma(0)=\gamma(T)=0\}$ を導入する。簡単のためこれを $\mathcal{H}$ と書く。$\mathcal{H}$ の元 γ_1，γ_2 に対し　内積を

$$(\gamma_1,\gamma_2)_{\mathcal{H}}=\int_0^T \dot{\gamma}_1(s)\dot{\gamma}_2(s)\,ds$$

とする。$\gamma(0)=y$，$\gamma(T)=x$　となる経路の空間としてはアフィン空間　$\gamma_0+\mathcal{H}=\{\gamma_0+\gamma \mid \gamma\in\mathcal{H}\}$　を考える。次に $\mathcal{H}$ の正値定符号の２次形式

$$Q(\gamma)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j e_j\otimes e_j$$

を考える。$\{e_j\}$ は c.o.n.s で，$\lambda_j>0$，かつ $\sum_j \lambda_j<\infty$ とする。$b\in\mathcal{H}$ を任意にとり，$N(d\gamma,b,Q)$ は，$\mathcal{H}$ 上のガウス測度で，平均ベクトルが b，分散テンソルが Q となるものとする。伊藤は次のように定式化した．

$$(1)\qquad \int_{\Omega} e^{i\hbar^{-1}S(\gamma)}\mathcal{D}[\gamma]=\lim_{n\to\infty} I_n(T,x,y),$$

ここで

$$(2)\quad I_n(T,x,y)=\left(\frac{1}{2\pi i\hbar T}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{n\lambda_j}{\hbar i}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathcal{H}} e^{i\hbar^{-1}S(\gamma_c+\gamma)}\,N(d\gamma,b,nQ).$$

である。

〔実際の伊藤の定式化は、もっと対称性が高い。[7] 参照
ここでは、古い形の定式化を引用した。〕

ここで問題となるのは、(1) 式の極限が実際に存在するのか？ということである。不幸にして、今迄のところ、(1) 式右辺の極限が存在することが証明されているのは、本質的に、次の2例である。

1° $V(x)=ax^2+bx+c$, a, b, c 定数

2° $V(x)=\int e^{ix\xi}\,d\mu(\xi)$, μ は有界変動の符号付の測度

一方では、Pauli [8] は、

$$(3)\qquad \operatorname{grad} V(x) = C(|x|) \qquad |x|\to\infty$$

のときに Feynman path 積分が“物理的に”取り扱うことが出来ることを論じている。我々の目標は、(3) に近い仮定の下で Feynman 経路積分を論じることである。

この講演では，ポテンシアル $V(x)$ について，次の仮定を課する。

(4) $$|\partial^j V(x)| \leq C_j \qquad j=2,3,4\cdots.$$

また二次形式としては，次の特別な形をとる．

(5) $$Q(\gamma)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j}(\gamma,e_j)_{\mathcal{H}}^2. \qquad \lambda>1.$$

ただし e_jは，Haars 函数の不定積分である。

定理　Qを上述の(5)とする。またポテンシアルは，(4)の仮定を満すものとする。このときある$\delta>0$が存在して，$0\leq T<\delta$であれば，(1)式の右辺の極限が存在する。極限はbによらない。極限を$K(T,x,y)$と書くと，これは，Schrödinger 方程式の基本解となる。

実際は，収束の早さ等も，たいへん細かに評価出来る。

§2 証明の概略.

Haars関数の不定積分：

$$g=2^{-n}(2k+1)\ ,\quad n=1,2,\cdots,\qquad k=0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1.$$

とおく。2進有限小数である。このnを$n(g)$，kを$k(g)$

と書く。 $m(q) = 2^{n(q)-1} + k(q)$ とする。このような各 q に対して，$\delta_q = 2^{-m(q)}T$ とおく。また

$$e_q(s) = \begin{cases} 0 & |qT - s| \geq \delta_q \text{ のとき}, \\ (2\delta_q)^{-\frac{1}{2}}(\delta_q - |s - qT|), & |s - qT| \leq \delta_q. \end{cases}$$

とおく。直ちに分るが

$$\frac{d}{ds}e_q(s) = \begin{cases} 0 & , \ |qT - s| \geq \delta_q \text{ のとき}, \\ (2\delta_q)^{-\frac{1}{2}} & , \ qT - \delta_q \leq s \leq qT \text{ のとき} \\ -(2\delta_q)^{-\frac{1}{2}} & , \ qT \leq s \leq qT + \delta_q \end{cases}$$

であるから，$\{\frac{d}{ds}e_q(s)\}_q$ は Haars 関数系を成す。従って $\{e_q(s)\}_q$ は $\mathcal{H}$ で c.o.n.s.（完全正規直交系）である。
次の等式も有用である。

(6) $\quad \|e_q\|_{L^\infty} = 2^{-\frac{1}{2}}\delta_q^{\frac{1}{2}}, \quad \|e_q\|_{L^2} = 3^{-\frac{1}{2}}\delta_q, \quad \|e_q\|_{L^1} = 2^{-\frac{1}{2}}\delta_q^{\frac{3}{2}}.$

この $\{e_q\}_q$ を使って二次形式 $Q(\gamma)$ は，$\lambda > 1$ に対し

(7) $$Q(\gamma) = \sum_q \lambda^{-m(q)} y_q^2,$$

ただし $y_q = (\gamma, e_q)_{\mathcal{H}}$ と書く。

、空間 $\mathcal{H}$ の分解,

幾つかの本質的でない因子を除くと $I_n(T,x,y)$ は形式的に

$$\prod_q\left(1+\frac{n\lambda^{-m(q)}}{\hbar i}\right)^{\frac12}\int_{R^\infty} e^{i\hbar^{-1}\left(\frac12\sum_q y_q^2-\int_0^T V(s+x(s))ds\right)} e^{-\frac{1}{2n}\sum_q\lambda^{m(q)}(y_q-b_q)^2}\prod_q\left(\frac{\lambda^{m(q)}}{2\pi n}\right)^{\frac12}dy_q$$

と書ける。ただし $b_q=(b,e_q)_{\mathcal{H}}$ である。ここで,

$e^{+i\hbar^{-1}\left(\frac12\sum y_q^2-\int_0^T V(s+x(s))ds\right)}$ は振動する項であり,

$$e^{-\frac{1}{2n}\sum_q\lambda^{m(q)}(y_q-b_q)^2}\prod_q\left(\frac{\lambda^{m(q)}}{2\pi n}\right)^{\frac12}dy_q$$

は正規分布の項である. y_q についての積分のうちで, $\frac{\lambda^{m(q)}}{n}$ が 0 に近い項は, 振動する部分が強く効いて来るし $\frac{\lambda^{m(q)}}{n}$ が非常に大きい項は正規分布の分散が小さく $y_q=b_q$ の近くに質量が集中する。このように考えると $\mathcal{H}$ を幾つかの部分空間に分解して取扱う必要があることが分る。

$\mathcal{H}$ を次のように分解する: まず $p>1$ を固定する。また N_0 を次のようにとる。

(2.1) $\forall N\geq N_0$ に対し $2^{-N}<\hbar^{2p}$ と

(2.2) $$2^N\lambda^{-2^{N-12}}<1.$$

とする。 (2) 式の n を十分大きくとって

(2.3) $$n^{-1}\lambda^{2^{N_0}} < \hbar^{-1}$$

とする。　次にこの n に対し、　N_n を

(2.4) $$n^{-1}\lambda^{2^{N_n}} \leq \hbar^{-1} < n^{-1}\lambda^{2^{N_n+1}}$$

で定める。　また、n に依存する正整数 $m_i = m_i(n)$, $i=0,1,2$ を

(2.5) $$n^{-1}\lambda^{m_2(n)} \leq \hbar^{-1} < n^{-1}\lambda^{m_2(n)+1}$$

(2.6) $$n^{-1}\lambda^{m_1(n)} \leq 2^{-\frac{1}{4\rho}N_n} < n^{-1}\lambda^{m_1(n)+1}$$

(2.7) $$n^{-1}\lambda^{m_0(n)} \leq 2^{-\rho N_n} < n^{-1}\lambda^{m_0(n)+1}$$

を満足するようにとる。

<u>命題 2.1</u>　次の事が成立する。

(2.8) $$-2^{N_n-12}\log\lambda < \log\hbar$$

(2.9) $$m_0(n) < m_1(n) < m_2(n)$$

(2.10) $$2^{N_n} \leq m_2(n) < 2^{N_n+1}$$

(2.11) $$m_2(n) - m_0(n) < 2^{N_n-10}$$

これを使って、

$$\mathcal{H}_1 = \text{span of } \{e_q \mid m(q) < m_0(n)\}$$

$$\mathcal{H}_2 = \text{span of } \{e_q \mid m_0(n) \leq m(q) < m_1(n)\}$$

$$\mathcal{H}_3 = \text{span of } \{e_q \mid m_1(n) \leq m(q) < m_2(n)\}$$

$$\mathcal{H}_4 = \text{span of } \{e_q \mid m_2(n) \leq m(q)\}$$

とすると、直交分解

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$$

が出来る。この分解にあわせて，$\gamma \in \mathcal{H}$ も

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

と成分に分解する。また上の直交分解は，Qをも分解するから

$$Q(\gamma) = Q_1(\gamma_1) + Q_2(\gamma_2) + Q_3(\gamma_3) + Q_4(\gamma_4)$$

となる。対応して $\mathcal{H}_i$ 上のガウス分布 $N_i(d\gamma_i, b_i, nQ_i)$ が定義されて $N(d\gamma, b, nQ)$ はそれらの直積としてあらわされる；

$$N(d\gamma, b, nQ) = \prod_{i=1}^{4} N_i(d\gamma_i, b_i, nQ_i).$$

$I_n(T: x, y)$ の形をもう少し分り易く書くことを考える。$\mathcal{H}_1$ で変数変換をする。$\dim \mathcal{H}_1 = m_0 - 1$ であった。$\{\xi T\}_{m(\xi) \leq m_0 - 1}$ を大きさの順に並べかえて，$[0, T]$ の分割

(2.12) $\Delta: \ 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{m_0-1} < \tau_{m_0} = T$

を得る。$\mathcal{H}_1$ の基底 $\{e_\xi\}_{m(\xi) \neq m_0}$ のグラフは，これらの τ_j のどれかにおいて，折れ曲った折線グラフである。従って，$\mathcal{H}_1$ は従って，これらの τ_j で折れ曲った，区分的直線のグラフをもつ函数の全体と一致する。そこで，$\mathcal{H}_1$

に新らしい基底 $\{w_j\}_{j=1}^{m_0-1}$ を導入する。

$$w_j(s) = \begin{cases} 0 & [\tau_{j-1}, \tau_{j+1}] \text{ の外側} \\ \dfrac{s-\tau_{j-1}}{\tau_j-\tau_{j-1}} & s \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \text{ のとき} \\ \dfrac{\tau_{j+1}-s}{\tau_{j+1}-\tau_j} & s \in [\tau_j, \tau_{j+1}] \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する。 $^\forall \gamma_1 \in \mathcal{H}_1$ に対し

$$x_j = \gamma_1(\tau_j) \qquad j = 1, 2, \cdots, m_0-1$$

とすると

$$\gamma_1 = \sum_j x_j w_j$$

である。少し計算すれば $y_q \longleftrightarrow x_j$ の変数変換の体積要素の変換は、

$$(2.14) \quad \prod_{m(q)=1}^{m_0-1} dy_q = \prod_{j=1}^{m_0} \left(\frac{1}{\tau_j - \tau_{j-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j$$

であることが判る。ガウス分布を

$$(2.15) \quad \left(\frac{1}{2\pi i \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} N_1(d\gamma_1, b_1, n Q_1)$$

$$= \prod_{j=1}^{m_0} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar \Delta\tau_j} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\hbar} \sum_{m(q)=1}^{m_0-1} \lambda^{m(q)} (y_q - b_q)^2} \prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j$$

と書くことが出来る。ここで $b_q = (b, e_q)_{\mathcal{H}}$ である。

また $\Delta\tau_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ とおいた。これを用いると、

$I_n(T, x, y)$ 中 $\mathcal{H}_1$ 上の積分に関わるところは、

$$(2.16)\quad \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{m(q)\le m_0} \left(1-\frac{n\lambda^{-m(q)}}{i\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} N_1(d\gamma_1, b_1, nQ_1)$$

$$= \prod_{j=1}^{m_0-1}\left(1-\frac{i\hbar\lambda^{j}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{m_0}\left(\frac{1}{2\pi i\hbar\Delta\tau_j}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2n}\sum_{m(q)=1}^{m_0-1}\lambda^{m(q)}(y_q-b_q)^2} \prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j .$$

となる。

Fubini の定理を適用すれば

$$(2.17)\quad I_n(T, x, y)$$

$$= \prod_{j=1}^{m_0}\left(\frac{1}{2\pi i\hbar\Delta\tau_j}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{m_0-1}} e^{-i\hbar^{-1}S(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2^*+b_3+b_4)}\, p(\gamma_1) \prod_{j=1}^{m_0-1} dx_j$$

と書ける。 ここで $p(\gamma_1)$ は,

$$(2.18)\quad p(\gamma_1) = e^{-\frac{1}{2n}\sum_{m(q)<m_0}\lambda^{m(q)}(y_q-b_q)^2} \prod_{m(q)\ge m_0}^{\infty}\left(1-\frac{n\lambda^{-m(q)}}{i\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \int_{\mathcal{H}_2+\mathcal{H}_3+\mathcal{H}_4} e^{i\hbar^{-1}\nu(S(\gamma_0+\gamma)-S(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2^*+b_3+b_4))} \prod_{j=2}^{4} N(d\gamma_j, b_j, nQ_j)$$

であり γ_2^* は $\mathcal{H}_2$ 上の汎関数

$$\mathcal{H}_2 \ni \gamma_2 \longmapsto S(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+b_3+b_4)$$

の停留点である。 γ_2^* は γ_1 の関数となる。

さて, γ_1^* は $S(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2^*+b_3+b_4)$ の停留点とする。 すなわち

$$(2.19) \qquad \partial_{\gamma_1} S(\gamma_0+\gamma_1^*+\gamma_2^*+b_3+b_4)=0。$$

$\gamma_1^*+\gamma_2^*$ の e_q への成分を

$$y_q^*=(\gamma_1^*+\gamma_2^*, e_q)_{\mathcal{H}}$$

とする。

定理1　ポテンシアルは条件(4)を満足するものと仮定する。このとき正数 δ が存在して，$|T|<\delta$ であれば，次のことが成立する

$$(2.20) \quad I_n(T, x, y)$$

$$= e^{\frac{i}{2\hbar}\|b_3+b_4\|^2_{\mathcal{H}}}$$

$$\exp -\frac{1}{2}\Big[\sum_{m(q)<m_1}\frac{\lambda^{m(q)}}{n}(y_q^*-b_q)^2+\sum_{m(q)\geq m_1}\frac{n\lambda^{-m(q)}}{1-in\nu\lambda^{-m(q)}}(\xi_q^*-b_q)^2\Big]$$

$$\times I(\Delta|\nu; x, y, T)$$

$$+\Big(\frac{1}{2\pi i\hbar T}\Big)^{\frac{1}{2}} e^{i\nu S(\gamma_0+\gamma_1^*+\gamma_2^*+b_3+b_4)} \qquad r_n(\nu, x, y, T)$$

ただし，$\nu=\hbar^{-1}$ で

$$I(\Delta|\nu, x, y, T)=\prod_{j=1}^{m_0}\Big(\frac{1}{2\pi i\hbar\Delta T_j}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^{m_0-1}} e^{i\nu S(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2^*+b_3+b_4)}\prod_{j=1}^{m_0-1}dx_j,$$

$$\xi_q^*=\int_0^T V'(\gamma_0(t)+\gamma_1^*(t)+\gamma_2^*(t)+b_3(t)+b_4(t))\,e_q(t)\,dt。$$

剰余項 $r_n(\nu, x, y, T)$ は次の評価を満足する。

$$(2.21) \qquad \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta r_n(\nu, x, y, T) \right|$$
$$\leq C_{\alpha\beta} \left(\delta_n^{\frac{1}{2}(p-1)} + \delta_n^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} + \delta^{1-\frac{1}{8p}} + t_n \delta^{\frac{1}{4p}} \right)$$

ただし $\delta_n = 2^{-N_n} T$

$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\delta_n \longrightarrow 0$ である。従って，$r_n(\nu, x, y, T)$ はその微分もこめて 0 に収束する。また $b_3 + b_4$ は $\mathcal{H}$ で 0 に強収束する。また次の定理によると (2.20) 式右辺第一項のまん中の $exp \cdots$ の因子も 1 に収束する。

<u>定理 2</u>　　任意の α, β に対し次の評価が成立する。

$$(2.22) \qquad \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \xi_q^* \right| \leq C_{\alpha\beta} \delta_q^{\frac{3}{2}} \left(1 + |x| + |y| + \|b_3\|_{\mathcal{H}} + \|b_4\|_{\mathcal{H}} \right)^{(1-\alpha-\beta)_+}.$$

ここで $\alpha_+ = \max(0, \alpha)$ である。

$$(2.23) \qquad \left| \sum_{m(q) \geq m_1} \frac{n \lambda^{-m(q)}}{1 - i\nu n \lambda^{-m(q)}} (\xi_q^* - b_q)^2 \right|$$
$$\leq C \delta_n^{\frac{3}{2}} \left(1 + |x|^2 + |y|^2 + \|b_3 + b_4\|_{\mathcal{H}}^2 \right).$$

$$(2.24) \qquad \left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta y_q^* \right| \leq C_{\alpha\beta} \delta_n^{\frac{3}{2}} \left(1 + |x| + |y| + \|b_3 + b_4\|_{\mathcal{H}} \right)^{(1-\alpha-\beta)_+}$$

$$(2.25) \qquad \sum_{m(q) < m_0} \frac{\lambda^{m(q)}}{n} (y_q^* - b_q)^2 \leq C \delta_n \left(1 + |x|^2 + |y|^2 + \|b_3 + b_4\|_{\mathcal{H}}^2 \right).$$

定理1と2によると，$I_n(T, x, y)$では結局，
$I(\Delta; \nu, x, y, T)$が主要であることが分る。

<u>定理3</u>　$|T| < \delta$のとき，

$$I(\Delta; \nu, x, y, T) = \left(\frac{1}{2\pi i h T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\nu S(\gamma_0 + \gamma_1^* + \gamma_2^* + b_3 + b_4)} (1 + k_n(\nu, x, y, T))$$

と書ける。　$\forall \alpha, \beta$に対し$C_{\alpha\beta}$が存在して

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k_n(\nu; x, y, T)| \leqq \prod_{j=1}^{m_0} (1 + C_{\alpha\beta} T \Delta \tau_j) - 1.$$

という評価が成立する。

ここで$n \to \infty$とすると$b_3 + b_4$は$\mathcal{H}$で0に強収束する。　従って$\gamma_0 + \gamma_1^* + \gamma_2^*$は，$\gamma_0 + \gamma^\#$に収束する。ただし$\gamma^\# + \gamma_0$は，古典軌道，すなわち，

(2.26)　　$\partial_\gamma S(\gamma_0 + \gamma^\#) = 0$

の解である。　よって定理3の中の$S(\gamma_0 + \gamma_1^* + \gamma_2^* + b_3 + b_4)$は，$n \to \infty$とすると，classical action

$$S_{cl}(x, y, T) = S(\gamma_0 + \gamma^\#)$$

へ収束する。　また$k_n(\nu, x, y, T)$も収束することが分る。

定理 4.　次の2つの事柄が証明出来る。

(i) $$\lim_{n\to\infty} S(\gamma_0+\gamma_1^*+\gamma_2^*+b_3+b_4)=S_{cl}(x,y,T)$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} k_n(x,y,T)=k(x,y,T)$$

が存在し，すべての α, β に関し

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \left(k_n(x,y,T)-k(x,y,T)\right)\right| \leq C_{\alpha\beta} \cdot T^2 \delta_n$$

以上，伊藤の公式の収束を論じたが，Schrödinger 方程式との関連は，

定理 5.

$$\left(\frac{1}{2\pi i\hbar T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\nu S_{cl}(x,y,T)}\left(1+k(x,y,T)\right)$$

は Schrödinger 方程式の基本解である。

更に技術的なことは別の機会に発表するが，方法として，停留位相法において，誤差項を，空間の次元によらずに評価する方法 [5] に，その基礎を置く。

文 献 表

[1] Albeverio, S. - H.Krohn. R.J. Mathematical theory of Feynman path integrals, Lecture note of Math. , 523, Springer Berlin (1976).

[2] Feynman, R.P.,Space time approach to non relativistic quantum mechanics, Rev. of Modern Phys. 20 (1948), 367-387.

[3] Fujiwara, D. remarks on convergence of some Feynman path integrals, Duke Math. J. 47 (1980) 559-600.

[5] Fujiwara, D., Stationary phase method with an estimate of remainder term on a space of large dimension. (Preprint) 1990.

[6] Fujiwara, D., The Feybnman path integral as an improper integral over the Sobolev space. Proc. Journee d'Equations aux derivee partielles Saint Jean de Monts, (1990)

[7] Ito, K. Generalized uniform complex measure in Hilbert space and its application to the Feynman path integrals, Proc. 5th Berkeley symposium on Math. Statitistics and Probability, vol. 2, pat 1, 145-161, Univ. Calif. press. Berkeley, (1967).

[8] Pauli, W. Selected topic in field quantization, Pauli lectures on Physics, vol.6, MIT Press (1973).